JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **10**, 379–399 (1974)

Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, II

D. BRAESS UND H. WERNER

Institut fur numerische und instrumentelle Mathematik der Universität Münster 44 Münster, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Diese Arbeit verschärft die in [6] enthaltenen Kriterien über Tschebyscheff-Approximationen mit rationalen Splinefunktionen. Es zeigt sich, daß man wie bei den γ-Polynomen [1] die in hinreichenden Bedingungen auftretende Länge einer Alternante verkürzen kann, wenn man das Vorzeichen der Fehlerfunktion im größten Alternantenpunkt berücksichtigt. Eine weitere Verkürzung der Alternante folgt aus der Tatsache, daß man eine Verschärfung der oberen Schranke für die Nullstellenanzahl der Differenz zweier rationaler Splines erhalten kann, wenn zu einem der Splines "wesentliche Regularitätsintervalle" (Definition siehe Abschnitt 4) gehören.

Ist die Approximierende ein eigentlicher rationaler Spline, so erweist sich das in [6] angegebene hinreichende Kriterium als notwendig.

Für die Fälle, daß die Definitionsintervalle aus nur einem oder zwei Teilstücken bestehen, werden die zur Charakterisierung der besten Approximierenden aus der Klasse rationaler Splines notwendigen und hinreichenden Bedingungen vollständig angegeben.

1. EINLEITUNG

Sei $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes reelles Intervall mit $l - 1$ Knoten $x_1, \ldots, x_{l-1}$. Sei $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{l-1} < x_l = \beta$. Von Werner [6] und Schaback [4] wurde die Familie der rationalen Splines eingeführt, die im ganzen Intervall konvex oder konkav sind. Da man durch Spiegelung an der x-Achse von der einen Familie zur anderen übergehen kann, können wir uns auf die konvexen Splines beschränken:

$$\gamma = \left\{ s \in C^2[I];\, s''(t) > 0,\, s(t)\,|_{I_j} = \frac{p_j(t)}{1 - \lambda_j(t - x_j)} \text{ für } j = 1, \ldots, l \right\}, \quad (1.1)$$

wobei p_j Polynome zweiten Grades sind und

$$I_j := [x_{j-1}, x_j]$$

die Intervallteilstücke von l bezeichnet. Außerdem wurde von Werner gezeigt, daß man zur Behandlung von Approximationsfragen den Abschluß $\bar{\gamma}$ von γ heranziehen muß. Für die Funktionen aus $\bar{\gamma}$ wurde ein Defekt $d(s)$ erklärt und nachgewiesen, daß eine Funktion $s \in \bar{\gamma}$ eine beste Approximation (im Sinne der Tschebyscheffnorm) ist, wenn eine Alternante der Länge $l + 4 - d(s)$ existiert oder wenn eine entsprechende Aussage für ein Teilintervall gilt.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß für die Familie der eigentlichen rationalen Splines γ das in [6] angegebene Kriterium für eine beste Approximation auch notwendig ist. Dabei benutzen wir im wesentlichen Lemmata über die lokale Lösbarkeit von Interpolationsproblemen mit rationalen Splines, die wir mit Hilfe des Brouwerschen Satzes über die Invarianz des Gebietes im Zusammenhang mit Nullstellensätzen gewinnen. Die hinreichende Bedingung für die Klasse $\bar{\gamma}$ der erweiterten rationalen Splines läßt sich verschärfen, indem man die Vorzeichenstruktur der Fehlerfunktionen auswertet. Es wird eine Zahl $e(s)$ eingeführt, die diese Struktur berücksichtigt; der rationale Spline s ist bereits dann eine beste Approximation, wenn $l + 3 - d(s) - e(s)$ Alternantenpunkte vorliegen und eine Vorzeichenbedingung erfüllt ist. In Spezialfällen erweist sich dieses Kriterium auch als notwendig, während der allgemeine Beweis dieser Aussage erhebliche technische Schwierigkeiten bereitet.

2. Definitionen und Nullstellensätze

Jede Funktion s aus dem Abschluß $\bar{\gamma}$ von γ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz wird als rationaler Spline bezeichnet [6]. Sie kann in einem Intervall (Teilstück) zu einer linearen Funktion entarten. Man spricht dann von einem Linearitätsintervall (Linearitätsteilstück) von s. Ein Intervall, in dem s streng konvex ist, soll dagegen ein Regularitätsintervall genannt werden.

Der Beschreibung von $\bar{\gamma}$ dient folgende Definition. Ein Knoten x_j heißt von k-ter Art für den Spline s, wenn s in der Umgebung von x_j $(k - 1)$mal stetig differenzierbar ist und die rechts- und linksseitige k-te Ableitung in x_j verschieden sind.

Wie in [6] gezeigt wurde, charakterisieren folgende Eigenschaften die Funktionen s aus $\bar{\gamma}$:

(1) In jedem Intervallteilstück ist s rationale Funktion der in (1.1) angegebenen Form.

(2) Die Funktion s ist stetig in I und kann Knoten 1., 2. und 3. Art besitzen.

Rechts und links von einem Knoten 1. Art liegen Linearitätsteilstücke.
In einem Knoten 2. Art stoßen ein Linearitätsteilstück und ein Regularitätsteilstück von s zusammen.
Im Inneren von I treten Linearitätsteilstücke stets in Paaren auf.

(3) Die Funktion s ist in I (schwach) konvex.

Die folgenden Sätze und Beweise nehmen meist auf Daten wie die Anzahl von Teilstücken und den Defekt bezug. Deshalb werden folgende Bezeichnungen eingeführt:
Sei J ein aus einem oder mehreren Intervallteilstücken von I bestehendes Intervall. Dann sei

$\mathscr{L}(J) :=$ Anzahl der in J enthaltenen Teilstücke.

$g(s, J) :=$ Anzahl der in J enthaltenen Linearitätsteilstücke von s.

$n_k(s, J) :=$ Anzahl der in J enthaltenen Knoten k-ter Art von s; die Randpunkte von J werden nicht mitgezählt.

$d(s, J) := g(s, J) - 2n_1(s, J) - n_2(s, J)$.

Ist J mit dem Intervall I identisch, so wird zuweilen das zweite Argument in den vorstehenden Funktionen weggelassen, z.B. ist $d(s) := d(s, I)$.
In diesem Paragraphen sollen die Nullstellenzahlen der Differenzen von Splinefunktionen untersucht werden.
Die Vielfachheit einer Nullstelle wird wie in der Analysis gezählt, d.h. f hat bei $t = t_0$ eine Nullstelle der Vielfachheit ν, wenn $0 = f(t) = f'(t) = \cdots = f^{(\nu-1)}(t)$ gilt, wobei $\nu - 1$ malige stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt ist. Wir werden jedoch Nullstellen der Differenzen von Splines, bzw. von ihren ersten und zweiten Ableitungen, höchstens mit der Vielfachheit drei bzw. zwei und eins zählen.
Außerdem werden wir zwei Nullstellen einer Funktion getrennt nennen, wenn die Funktion zwischen den beiden nicht identisch verschwindet.
Für die gesamte Arbeit treffen wir folgende Vereinbarungen, ohne sie immer wieder explizit zu erwähnen.

Vereinbarung A. Mit P und Q bezeichnen wir disjunkte Teilmengen natürlicher Zahlen, deren Vereinigung gerade die Zahlen von 1 bis $l - 1$ ergibt. Es sei $p := | P |$ und $q := | Q |$, also $p + q = l - 1$. Wir betrachten P und Q in diesem Paragraphen als vorgegeben. Die eigentliche Festlegung erfolgt im Paragraphen 3.

Vereinbarung B. Einem Paar von Funktionen s, $\tilde{s} \in \tilde{\gamma}$ werde $r(t) := s(t) - \tilde{s}(t)$ und $w(t) := r''(t)$ zugeordnet.
Sei s in I_j gemäß (1.1) dargestellt. Dann wird λ_j als j-te charakteristische Zahl bezeichnet. Die Bedeutung dieser Zahlen entnimmt man dem Lemma.

LEMMA 2.1. *Seien s, $\tilde{s} \in \gamma$. Dann hat w in I_j nicht zwei getrennte Nullstellen. Sofern w eine Nullstelle in I_j besitzt, gilt*

$$\operatorname{sign}[w(x_j) - w(x_{j-1})] = \operatorname{sign}(\lambda_j - \tilde{\lambda}_j). \tag{2.1}$$

Beweis. Die Funktion w hat in I_j die Form

$$w(t) = \frac{c}{[1 - \lambda(t - x_j)]^3} - \frac{\tilde{c}}{[1 - \tilde{\lambda}(t - x_j)]^3} \tag{2.2}$$

mit $c, \tilde{c} > 0$. Daraus folgt die erste Aussage unmittelbar. Zum Beweis von (2.1) nehme man an, daß $w(t)$ in I_j die Nullstelle z hat, und beachte, daß der Ausdruck (2.2) keine weitere davon getrennte Nullstelle haben kann. Es genügt also, das Vorzeichen von w' an der Nullstelle z zu bestimmen. Indem man ausnutzt, daß an der Nullstelle die beiden rechts stehenden Terme von (2.2) übereinstimmen, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} w'(z) &= \frac{c \cdot \lambda}{[1 - \lambda(z - x_j)]^4} - \frac{\tilde{c} \cdot \tilde{\lambda}}{[1 - \lambda(z - x_j)]^4} \\
&= \frac{c}{[1 - \lambda(z - x_j)]^3} \left\{ \frac{\lambda}{1 - \lambda(z - x_j)} - \frac{\tilde{\lambda}}{1 - \tilde{\lambda}(z - x_j)} \right\} \\
&= \frac{c}{[1 - \lambda(z - x_j)]^4 \cdot [1 - \tilde{\lambda}(z - x_j)]} \cdot (\lambda - \tilde{\lambda}).
\end{aligned}$$

Da der Nenner positiv ist, erhält man (2.1). ∎

Bemerkung. Man entnimmt dieser Formel auch, daß das Verschwinden von $w'(z)$ mit der Relation $\lambda = \tilde{\lambda}$ äquivalent ist und $w \equiv 0$ in I_j zur Folge hat. Die Vorzeichenaussage von Lemma 2.1 entspricht genau den Verschärfungen, die bei Nullstellen von γ-Polynomen auftreten, Braess [1].

Eine unmittelbar einleuchtende Folgerung von Lemma 2.1 ist das Korollar.

KOROLLAR 2.2. *Seien s, $\tilde{s} \in \gamma$, und es gelte*

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j = \tilde{\lambda}_{j+1} - \tilde{\lambda}_j \tag{2.3}$$

für $j = i, i + 1, \ldots, i + m - 1$. Dann hat w in $[x_{i-1}, x_{i+m}]$ höchstens eine aus einem Punkte bestehende Nullstelle oder verschwindet identisch. Wenn genau eine Nullstelle auftritt, gilt

$$\operatorname{sign}[w(x_{i+m}) - w(x_{i-1})] = \operatorname{sign}(\lambda_i - \tilde{\lambda}_i). \tag{2.4}$$

Zum Beweise beachte man, daß unter der Voraussetzung (2.3) *das identische*

Verschwinden von w *auf einem einzigen Teilstück* I_j *bereits* $w \equiv 0$ *in* $[x_{i-1}, x_{i+m}]$ *impliziert. Dies ergibt sich unmittelbar aus der vorangegangenen Bemerkung.*

Damit erhalten wir als Satz

SATZ 2.3. *Sei* P *eine feste Teilmenge von* $\{1,..., l-1\}$. *Gilt für* $s, \tilde{s} \in \gamma$ *die Relation*

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j = \tilde{\lambda}_{j+1} - \tilde{\lambda}_j \qquad \text{für alle} \quad j \in P, \tag{2.5}$$

so hat r *höchstens* $l + 2 - p$ *getrennte Nullstellen.*

Bemerkungen. (1) Verschwindet r also unter den genannten Voraussetzungen in mehr als $l + 2 - p$ Punkten, so ist es in einem Teilstück identisch Null.

(2) Die Relation (2.5) wirkt wie eine Reduktion der Knotenzahl. Ihr entspricht bei linearen Familien [5] der Fall, daß in der Differenz $s - \tilde{s}$ (die dann selbst wieder zur Familie gehört) der Knoten nicht mehr in Erscheinung tritt und die Ergebnisse für kleinere Knotenzahle anwendbar sind.

Beweis von Satz 2.3. Angenommen r habe $l + 3 - p$ getrennte Nullstellen. Da r zweimal stetig differenzierbar ist, hat w nach einer leicht zu beweisenden Verschärfung des Satzes von Rolle mindestens $l + 1 - p$ getrennte Nullstellen. Andererseits können in l Teilstücken nach Korollar 2.2 höchstens $l - p$ getrennte Nullstellen liegen. Das ist ein Widerspruch. ∎

Nun können wir ähnlich wie Schumaker [5] für kubische Splines unter geeigneten Bedingungen auf identisches Verschwinden von r im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ schließen.

SATZ 2.4. *Sei* $\{y_i\}_{i=1}^{q} = \{x_i\}_{i \in Q}$ *eine Menge von* q *Knoten, ferner seien* $s, \tilde{s} \in \gamma$, *und* (2.5) *sei erfüllt. Die Differenz* $s - \tilde{s}$ *habe die Nullstellen* $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{q+4}$, *von denen jeweils höchstens* 3 *zusammen fallen mögen, und es gelte*

$$t_i < y_i < t_{i+4}, \qquad i = 1, 2,..., q. \tag{2.6}$$

Dann ist $s \equiv \tilde{s}$ *auf* $[\alpha, \beta]$.

Bemerkung. Für kubische Splines ist der entsprechende Satz in [5] nur für den Fall formuliert, daß P leer ist.

Beweis von Satz 2.4. Für einen Induktionsbeweis betrachte man allgemeiner rationale Splines mit Definitionsbereich J mit $\mathscr{L}(J) = k$. Für $k = 1$, $p = q = 0$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 2.3. Für Differenzen von Splines auf Definitionsbereichen mit $\mathscr{L}(J) \leqslant k - 1$ sei die Aussage bereits bewiesen. Es werden Splines s, $\tilde{s}$ auf einem Intervall J mit $\mathscr{L}(J) < k$ betrachtet. Nach Satz 2.3 verschwindet $r = s - \tilde{s}$ auf einem Teilstück $I_{j+1} \subset J$, wenn (2.5) gilt und $q + 4$ Nullstellen vorhanden sind.

Zum Nachweis, daß r auch in $[x_0, x_j]$ verschwindet bei $j \geq 1$, unterscheiden wir zwei Fälle.

FALL 1. *Sei $j \in Q$ und q_1 die Zahl der Knoten $x_i < x_j$ mit $i \in Q$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} t_i^* &= t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, q_1 + 1. \\ t_{q_1+2}^* &= t_{q_1+3}^* = t_{q_1+4}^* = x_j. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dann gilt wegen (2.6) *und $t_{q_1+1} < y_{q_1+1} = x_j$ offensichtlich*

$$t_i^* < y_i < t_{i+4}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, q_1. \tag{2.8}$$

Sei p_1 die Zahl der Knoten $\{x_i\,;\, i < j,\, i \in P\}$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die Restriktion $r|_{[x_0, x_j]}$ folgt wegen $p_1 + q_1 = j - 1 < k - 1$ die Behauptung für das Intervall.

FALL 2. *Sei $j \in P$. Da r auf I_{j+1} verschwindet, ist $\lambda_{j+1} = \tilde{\lambda}_{j+1}$. Sei i das kleinste Element von P derart, daß $i, i+1, \ldots, j$ zu P gehören, daß für diese Indizes also* (2.5) *gilt. Nach Korollar* 2.2 *impliziert das Verschwinden von r auf I_{j+1} das identische Verschwinden von r auf $[x_{i-1}, x_{j+1}]$.*

Ist $i - 1 = 0$, so ist die Behauptung bewiesen, andernfalls gehört $i - 1$ zu Q und die Behauptung folgt mit Fall 1.

Aus Symmetriegründen ergibt sich auch für $[x_j, x_k]$ die Behauptung $r \equiv 0$. ∎

3. Notwendiges Kriterium für γ

Zum Beweis der Notwendigkeit der Alternantenbedingung sind als Vergleichsfunktionen Splines mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. Die Konstruktion wird auf Interpolationssätze gegründet.

DEFINITION. Sei $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^{l+3}$ die Menge der Vektoren $z = (z_{-1}, z_0, \ldots, z_{l+1})$, die folgende Ungleichungen erfüllen:

$$\frac{z_{j+1} - z_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{z_j - z_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l-1,$$

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} - z_{-1} > 0,$$

$$z_{l+1} - \frac{z_l - z_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} > 0.$$

Die Indizierung ist motiviert durch die Tatsache, daß z_{-1} und z_{l+1} Vorgaben von Ableitungen entsprechen, während $z_0, \ldots, z_l$ die Werte in den zugeordneten x-Werten liefern sollen, wie der folgende Satz zeigt.

SATZ 3.1. (Schaback [4]). *Ordnet man jedem $z \in \mathscr{D}$ den Spline $s \in \gamma$ mit*

$$\begin{aligned} s(x_j) &= z_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, l, \\ s'(x_0) &= z_{-1}, \\ s'(x_l) &= z_{l+1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

zu, so erhält man einen Homöomorphismus φ: $\mathscr{D} \to \gamma$, wenn γ mit der durch die Tschebyscheffnorm induzierten Topologie versehen ist.

Die Ungleichungen (3.1) sind gerade die Bedingungen dafür, daß durch die Punkte (x_j, z_j) eine konvexe Funktion mit den Ableitungen z_{-1}, z_{l+1} in den Randpunkten gelegt werden kann.

Schaback zeigte nur die Injektivität der Abbildung $z \to s$. Aus dem Existenzbeweis geht jedoch hervor, daß die Abbildung φ stetig ist. Die Stetigkeit von φ^{-1}: $\gamma \to \mathscr{D}$ zu zeigen, bereitet keine Schwierigkeiten.

Während sich Satz 3.1 auf das Interpolationsproblem mit den Knoten als Stützstellen bezieht, brauchen die Stützstellen in den folgenden Interpolationsaufgaben keine Knoten zu sein. Allerdings ergeben sich nur lokale Lösbarkeitsaussagen.

SATZ 3.2. *Sei $s \in \gamma$ und Q eine Teilmenge von $\{1, \ldots, l-1\}$. Die Punkte $t_1 < t_2 < \cdots < t_{q+4}$ mögen den Relationen* (2.6) *genügen. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon, s, t_1, \ldots, t_{q+4}) > 0$, so daß aus*

$$| s(t_i) - u_i | < \delta, \qquad i = 1, 2, \ldots, q + 4 \tag{3.3}$$

die Existenz einer Interpolierenden $\tilde{s} \in \gamma$ folgt, welche

$$\tilde{s}(t_i) = u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, q + 4, \tag{3.4}$$

sowie die Relationen (2.5) *und $\| s - \tilde{s} \| < \epsilon$ erfüllt.*

Beweis. Durch $j(i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ seien die Elemente der Menge $P = \{1, \ldots, l-1\} \setminus Q$ indiziert.

Wir definieren eine Abbildung ψ: $\gamma \to \mathbb{R}^{l+3}$ durch $u = \psi(\tilde{s})$ mit

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{s}(t_i), & i &= 1, 2, \ldots, q + 4, \\ u_{q+4+i} &= \tilde{\lambda}_{j(i)+1} - \tilde{\lambda}_{j(i)}, & i &= 1, 2, \ldots, p. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Der Satz 2.4. sagt aus, daß ψ injektiv ist. Also ist auch $\chi = \psi \circ \varphi$: $\mathscr{D} \to \mathbb{R}^{l+3}$

injektiv. Außerdem ist χ stetig. Für die ersten $q + 4$ Komponenten ist dies evident, und nach Formel (3.7) in [4] hängen auch die charakteristischen Zahlen stetig von $(z_{-1}, ..., z_{l+1})$ ab. Die Menge $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^{l+3}$ ist offen. Betrachtet man eine kompakte Umgebung U von $z \in \mathscr{D}$ mit $s = \varphi(z)$, so wird durch $\chi|_U$ ein Homöomorphismus zwischen U und $\chi(U)$ vermittelt; denn mit Hilfe von Kompaktheitsschlüssen kann man leicht auf die Stetigkeit von χ^{-1} auf $\chi(U)$ schließen. Nach dem Brouwerschen Satz über die Invarianz des Gebietes [2] ist $\chi(z) = \psi(s)$ ein innerer Punkt von $\chi(U)$. Also ist die Interpolationsaufgabe für hinreichend kleine δ lösbar und wegen der Stetigkeit von φ ist auch $\| s - \tilde{s} \| < \epsilon$ für hinreichend kleine δ erfüllt. ▮

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die beste Approximation $s^* \in \gamma$ zu einer gegebenen stetigen Funktion f zu charakterisieren. Mit Hilfe des Satzes 3.2 soll zu gegebenem Spline s ein besser approximierender konstruiert werden, sofern $f - s$ nicht die Alternantenbedingung erfüllt. Zuerst werden in Abhängigkeit von s die Teilmengen P und Q festgelegt; ein Auswahlverfahren liefert das folgende Lemma (vgl. Schumaker [5]).

LEMMA 3.3. *Sei*

$$t_1 \leqslant \bar{t}_1 \leqslant \mathbf{t}_2 \leqslant \bar{t}_2 < \cdots < \mathbf{t}_{q+4} \leqslant \bar{t}_{q+4}, \tag{3.6}$$

und für jedes k mögen in jedem Intervall der Form $(\bar{t}_i, \mathbf{t}_{i+k+3})$ mit $1 \leqslant i \leqslant i + k + 3 \leqslant l - 1$ mindestens k Knoten von $\{x_i\}_{i=1}^{l-1}$ liegen. Dann gibt es eine Auswahl von q Knoten $\{y_i\}_{i=1}^{q}$, derart daß

$$t_i < y_i < \mathbf{t}_{i+4}, \qquad i = 1, 2, ..., q. \tag{3.7}$$

Beweis. Im Falle $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $q \geqslant 1$. Nach Voraussetzung enthält das Intervall $[\bar{t}_1, \mathbf{t}_5]$ wenigstens einen Knoten. Man wähle für y_1 den kleinsten Knoten x_i von ihnen. Er erfüllt selbstverständlich (3.7).

Die weitere Konstruktion erfolgt induktiv. Sei y_{j-1} bereits gefunden. Man setze

$$y_j := \min\{x_i : \bar{t}_j < x_i < \mathbf{t}_{j+4}, x_i > y_{j-1}\}. \tag{3.8}$$

Es ist zu zeigen, daß die Menge auf der rechten Seite von (3.8) nicht leer ist. Wir nehmen an, dies sei falsch.

Da nach Voraussetzung in $(\bar{t}_j, \mathbf{t}_{j+4})$ mindestens ein Knoten liegt, gilt also $y_{j-1} > \bar{t}_j$. Da es außerdem in $(\bar{t}_1, \mathbf{t}_{j+4})$ mindestens j Knoten geben soll, so gehören diese Knoten nicht alle zu der Menge $\{y_i\}_{i=1}^{j-1}$. Sei x_ν der größte Knoten, der nicht zu dieser Menge gehört und $y_\mu = x_{\nu+1}$. Nach Konstruktion ist $x_{\nu+1}$ der kleinste Knoten in $(\bar{t}_\mu, x_l)$. Aufgrund der Auswahl von ν

sind die $j - \mu$ Knoten $y_\mu, \ldots, y_{j-1}$ die einzigen Knoten in $(\bar{t}_\mu, \mathbf{t}_{j+4})$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung dieses Satzes. ▮

Nun sind alle Hilfsmittel für den Beweis des Alternantenkriteriums bereitgestellt.

SATZ 3.4. *Sei $f \in C(I)$. Der Spline $s \in \gamma$ ist genau dann beste Approximation von f bezüglich $\bar{\gamma}$, wenn ein Teilintervall der Form $[x_m, x_{m+k+1}]$ mit einer Alternante der Länge $k + 5$ existiert.*

Beweis. Daß diese Bedingung hinreichend ist, besagt Satz 5.1 von [6]. Es bleibt nur die Notwendigkeit zu zeigen.

Sei $s \in \gamma$, und es gebe kein der Behauptung entsprechendes Teilintervall. Da mit s auch $s + p$ zu γ gehört, wenn p eine lineare Funktion ist, muß $f - s$ wenigstens drei Alternantenpunkte besitzen. Andernfalls könnte man $f - s$ durch eine lineare Funktion besser approximieren. Sei $q + 4$ die Länge der Alternante und $q \leqslant l - 1$.

Sei zunächst $q \geqslant 0$. Es bezeichne $[\mathbf{t}_i, \bar{t}_i]$, $i = 1, 2, \ldots, q + 4$ die minimalen Intervalle, mit denen sich die Alternantenpunkte von $(f - s)$ so überdecken lassen, daß in jedem einzelnen Intervall nur Alternantenpunkte vorkommen, in denen $f - s$ positiv ist, oder nur solche, in denen $f - s$ negativ ist. In benachbarten Intervallen $[\mathbf{t}_i, \bar{t}_i]$ und $[\mathbf{t}_{i+1}, \bar{t}_{i+1}]$ treten nur Extrema verschiedenen Vorzeichens auf.

Da die Behauptung des Satzes nicht zutreffen soll, ist die Voraussetzung von Lemma 3.3 erfüllt, und es gibt eine Auswahl von q Knoten mit der Anordnung (3.7). Das Komplement definiere die Menge P. Daraus folgt

$$\max(y_{i-3}, \bar{t}_i) < \min(y_i, \mathbf{t}_{i+1}), \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Also kann man $q + 3$ Punkte z_i wählen, so daß

$$\begin{aligned} \bar{t}_i < z_i < \mathbf{t}_{i+1}, \qquad & i = 1, 2, \ldots, q + 3, \\ z_i < y_i < z_{i+3}, \qquad & i = 1, 2, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ferner sei $z_0 = \alpha$, $z_{q+4} = \beta$.
Die Vereinigung von $\{z_i\}_{i=1}^{q+3}$ mit $\{\bar{t}_1\}$ werde mit $\{z_i{}^*\}_{i=1}^{q+4}$ bezeichnet, wobei die $z_i{}^*$ geordnet seien. Aus (3.9) folgt

$$z_i{}^* < y_i < z_{i+4}^*, \qquad i = 1, 2, \ldots, q. \tag{3.10}$$

Nun konstruieren wir eine bessere Approximation nach Standardmethoden: Man setze

$$\epsilon = \tfrac{1}{2} \min_{i=1,2,\ldots,q+4} \min_{t \in [z_{i-1}, z_i]} \{\| f - s \| + [f(t) - s(t)] \operatorname{sign}[f(\bar{t}_i) - s(\bar{t}_i)]\}. \tag{3.11}$$

Nach Satz 3.2 existiert eine Funktion $\tilde{s}(t)$, derart daß (2.5) gilt und

$$\begin{aligned} \tilde{s}(z_i) &= s(z_i), \\ \tilde{s}(\bar{t}_1) &= s(\bar{t}_1) + \delta \operatorname{sign}[f(\bar{t}_1) - s(\bar{t}_1)], \qquad \delta > 0, \\ \| \tilde{s} - s \| &< \epsilon. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nach Satz 2.4 sind die Punkte z_i die einzigen Nullstellen von $\tilde{s} - s$, da andernfalls $\tilde{s} - s \equiv 0$ folgen würde. Außerdem sind diese Nullstellen einfach, d.h. Nullstellen mit Zeichenwechsel. Also ist $\tilde{s}$ in einer Umgebung der Intervalle $[\mathbf{t}_i, \bar{t}_i]$ eine bessere Approximation. Schließlich stellt (3.11) sicher, daß dies im ganzen Intervall $[\alpha, \beta]$ gilt.

Falls jede Alternante höchstens die Länge 3 hat, d.h. $q = -1$ gilt, wähle man z_1 und z_2 gemäß

$$\bar{t}_i < z_i < \mathbf{t}_{i+1}, \qquad i = 1, 2,$$

setze $Q = \varnothing$, $P = \{1,..., l - 1\}$ und bestimme die Vergleichsfunktion s anstatt aus (3.12) als Lösung von

$$\begin{aligned} \tilde{s}(z_i) &= s(z_i), \qquad i = 1, 2, \\ \tilde{s}(x_0) &= s(x_0) + \delta \operatorname{sign}[f(\bar{t}_1) - s(\bar{t}_1)], \\ \tilde{s}(x_l) &= s(x_l) + \delta \operatorname{sign}[f(\bar{t}_3) - s(\bar{t}_3)], \end{aligned}$$

und den Bedingungen (2.5). Es gilt

$$\| s - \tilde{s} \| < \epsilon$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$. Auch hier sind z_1, z_2 die einzigen Nullstellen von $\tilde{s} - s$, da andernfalls mindestens vier Nullstellen vorliegen müßten, was im Widerspruch zu Satz 4.2 steht. Wie oben schließt man, daß $\tilde{s}$ bessere Approximation ist. ∎

4. Ein hinreichendes Kriterium für $\bar{\gamma}$

Es soll gezeigt werden, daß man das in [6] angegebene hinreichende Kriterium für beste Approximationen mit rationalen Splinefunktionen verschärfen kann, falls die zu prüfende Funktion in $\bar{\gamma} \backslash \gamma$ enthalten ist. Man stützt sich dabei auf eine genauere Untersuchung der Nullstellenzahl von Differenzen solcher Splinefunktionen, bei der auch Informationen über bestimmte Vorzeichen ausgewertet werden.

Definition 4.1. Sei $s \in \bar{\gamma} \backslash \gamma$. Wenn s in dem rechten Randteilstück I_l

von I linear ist oder wenn I_l zu einem Regularitätsintervall mit einer ungeraden Anzahl von Teilstücken gehört, heißt s (rechts) negativ dominant; gehört I_l zu einem Regularitätsintervall mit einer geraden Zahl von Teilstücken, heißt s (rechts) positiv dominant.

Jedes $s \in \gamma$ heiße regulär oder nicht dominant.

Ein Regularitätsintervall J der Funktion s soll wesentlich genannt werden, wenn es von zwei Knoten zweiter Art begrenzt wird und eine ungerade Anzahl von Intervallteilstücken enthält. Dann bezeichne $e(s, I)$ für $s \in \bar{\gamma}$ die Zahl der wesentlichen Regularitätsintervalle J von I.

Mit diesen Bezeichnungen gilt Lemma 4.1.

Lemma 4.1. *Sei $s \in \bar{\gamma} \cap C^1$ und $\tilde{s} \in \gamma$. Dann gilt für die Zahl der getrennten Nullstellen von r' die Abschätzung*

$$N(r', I) \leqslant \mathscr{L}(I) + 1 - d(s, I) - e(s, I). \tag{4.1}$$

Wenn in (4.1) *das Gleichheitszeichen steht und s positiv bzw. negativ dominant ist, dann gilt $r'(\beta) \geqslant 0$ bzw. $r'(\beta) \leqslant 0$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl $e(s, J)$ der wesentlichen Regularitätsintervalle eines Teilintervalles $J \subset I$.

Ist $e(s, J) = 0$, so ist die Abschätzung (4.1) bereits durch Satz 4.1 in [6] gegeben. Angenommen, $N(r', J)$ sei maximal. Gehört s zu $\bar{\gamma} \backslash \gamma$, so gibt es ein Linearitätsintervall. Wie man dem Beweis von Satz 4.1 in [6] entnimmt, muß im Falle maximaler Nullstellenzahl in diesem Intervall eine Nullstelle von r' auftreten, und an seinem rechten Endpunkt x_k ist $r' \leqslant 0$. Dies gilt besonders für das am weitesten rechts gelegene Linearitätsintervall I_{lin}. Stimmt x_k mit dem rechten Randpunkt von J überein, so ist die Vorzeichenaussage bewiesen. Andernfalls schließt an x_k ein Regularitätsintervall I^* an. Wegen der Maximalität ist x_k nicht Nullstelle, denn sonst würde es in der Abzählung sowohl in I_{lin} als auch in I^* auftreten, also ist $r'(x_k) < 0$. Aus dem gleichen Grunde liegen in I^* genau $\mathscr{L}(I^*) + 1$ Nullstellen unter Berücksichtigung der Vielfachheit. Die Zahl der Zeichenwechsel (mod 2) liefert die behauptete Vorzeichenaussage.

Sei die Behauptung für alle Intervalle J mit $e(s, J) < k \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen, und sei s ein Spline mit $e(s, I) = k$.

Sei x_m der rechte Randpunkt des am weitesten rechts liegenden wesentlichen Regularitätsintervalls. Wir betrachten die Teilintervalle $I_1 = [x_0, x_m]$ und $I_2 = [x_m, x_l]$. Von letzterem läßt sich gemäß $I_2 = I_{\text{lin}} \cup I^*$ ein Linearitätsintervall abspalten, wobei I^* leer sein kann. Es ist

$$\begin{aligned} e(s, I) &= e(s, I_1) + 1, \\ d(s, I) &= d(s, I_1) + d(s, I_2) - 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat r' in I_1 höchstens

$$\mathscr{M} = \mathscr{L}(I_1) + 1 - d(s, I_1) - e(s, I_1) \tag{4.3}$$

Nullstellen. Wir unterscheiden zwei Fälle

(i) Hat r' in $[x_0, x_m]$ weniger als $\mathscr{M}$ Nullstellen, so gilt

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(r', I) &\leqslant (\mathscr{M} - 1) + \mathscr{N}(r', I_2) \\ &\leqslant \mathscr{M} - 1 + \mathscr{L}(I_2) + 1 - d(s, I_2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dies liefert zusammen mit (4.2) und (4.3) die Formel (4.1).

(ii) Hat r' in $[x_0, x_m]$ genau $\mathscr{M}$ Nullstellen, dann ist x_m rechter Randpunkt eines Regularitätsintervalls mit einer ungeraden Anzahl von Teilstücken, und nach Induktionsvoraussetzung gilt $r'(x_m) \leqslant 0$. Da r' in I_{lin} monoton fällt, ist r' im Inneren von I_{lin} nullstellenfrei, und am rechten Randpunkt von I_{lin} ist $r' < 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(r', I) &\leqslant \mathscr{M} + \mathscr{N}(r', I^*) \\ &\leqslant \mathscr{M} + \mathscr{L}(I^*) + 1 - d(s, I^*). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aus $d(s, I_2) = \mathscr{L}(I_{\text{lin}}) + d(s, I^*) - 1$ ergibt sich mit (4.2) und (4.3) die Behauptung (4.1).

Zugleich ist damit gezeigt, daß die Maximalzahl von Nullstellen nur dann vorkommen kann, wenn in I^* die maximale Anzahl von Nullstellen auftritt und $r' < 0$ am linken Rand von I^* gilt. Daraus ergibt sich der Zusatz wie für den Fall $e(s, I) = 0$. ∎

Als unmittelbare Folgerung erhält man Satz 4.2.

SATZ 4.2. *Seien $s, \tilde{s} \in \bar{\gamma}$. Dann gilt für die Anzahl der getrennten Nullstellen von r die Abschätzung*

$$\mathscr{N}(r, I) \leqslant \mathscr{L}(I) + 2 - d(s, I) - e(s, I). \tag{4.6}$$

Wenn die Zahl der getrennten Nullstellen im offenen Intervall (α, β) mit (4.6) übereinstimmt und s positiv bzw. negativ dominant ist, dann ist $(s - \tilde{s})(\beta)$ positiv bzw. negativ.

Beweis. Für $s \in \gamma$ ist diese Aussage bereits mit Satz 4.1 von Werner [6] bewiesen.

Sei also $s \in \bar{\gamma}\backslash\gamma$, und zunächst sei angenommen, daß s keine Knoten erster Art hat. Für $\tilde{s} \in \gamma$ liefert Lemma 4.1 zusammen mit dem Satz von Rolle die Behauptung; andernfalls zieht man das schon in [6, Teil 3 des Beweises von Satz 4.1] benutzte Approximationsargument heran.

Schließlich ist der Fall zu betrachten, daß s Knoten erster Art besitzt. Sei $I = J_1 \cup J_2$, wobei J_1 und J_2 durch einen Knoten erster Art getrennt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(I) &= \mathscr{L}(J_1) + \mathscr{L}(J_2), \\ d(s) &= d(s, J_1) + d(s, J_2) - 2, \\ e(s) &= e(s, J_1) + e(s, J_2) \end{aligned}$$

bekommt man die gewünschte Abschätzung sofort aus $\mathscr{N}(s - \tilde{s}, I) \leqslant \mathscr{N}(s - \tilde{s}, J_1) + \mathscr{N}(s - \tilde{s}, J_2)$ durch ein einfaches Induktionsargument. Daß sich die Zusätze übertragen, ist offensichtlich. ▮

Die Vorzeichenaussagen in den Nullstellensätzen übertragen sich auf die Alternantenkriterien. Wir vereinbaren deshalb (vgl. [1]).

Definition 4.2. Eine Alternante $(x_1, ..., x_m)$ der Länge m heiße positiv (negativ), wenn $f(x_m) - s(x_m)$ positiv (negativ) ist.

Mit dem Standardschluß der Approximationstheorie—Vergleich einer die Alternantenbedingung erfüllenden Funktion aus $\tilde{\gamma}$ mit einer hypothetischen besseren Approximation (vgl., [3, Theorem 93])—erhält man als hinreichendes Alternantenkriterium den

Satz 4.3. *Sei $f \in C[\alpha, \beta]$. Es ist $s \in \tilde{\gamma}$ eine beste Approximation zu f, wenn ein Teilintervall J existiert, in dem eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(α) *Es gibt eine positive (negative) Alternante der Länge*

$$\mathscr{L}(J) + 3 - d(s, J) - e(s, J)$$

in J, wenn s dort rechts positiv (negativ) dominant ist.

(β) *Die Alternante hat die Länge $\mathscr{L}(J) + 4$, falls s in J regulär ist.*

5. Vollständige Behandlung des Falles $\mathscr{L}(I) \leqslant 2$

Zunächst werde der Fall betrachtet, daß das Intervall I nur aus einem Teilstück besteht, $\mathscr{L}(I) = 1$. Man kann auf die klassischen Ergebnisse der Tschebyscheff-Approximation mit rationalen Funktionen zurückgreifen, Werner [7].

Ist s nicht ausgeartet, so ist s genau dann beste Approximation von $f(x) \in C(I)$, wenn eine Alternante der Länge $5 =$ Zählergrad $+$ Nennergrad $+ 2$ existiert.

Im Falle der Ausartung ist s eine lineare Funktion. Da hier jedoch nur konvexe Funktionen zur Konkurrenz zugelassen sind, so ist abweichend von der klassischen Theorie die Funktion s nach Satz 4.3 bereits als beste Approximation von f zu erkennen, wenn eine negative Alternante der Länge 3 existiert.

Auch die Notwendigkeit dieser Bedingungen ist leicht einzusehen. Wäre die Länge jeder Alternanten kleiner als 3, existiert sogar eine besser approximierende Gerade. Liegen nur positive Alternanten der Länge 3 vor, so kann man aufgrund der klassischen Theorie im Bereiche der rationalen Funktionen mit quadratischem Zähler und linearem Nenner eine bessere Approximation s^* finden. Weil s^* speziell in den drei Alternantenpunkten besser approximiert, ist s^* konvex und in γ enthalten.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen lassen sich zusammenfassen zu Tabelle 1.

TABELLE 1

Notwendige und hinreichende Bedingungen im Fall $\mathscr{L}(I) = 1$

Fall	$g(s)$	$d(s)$	Alternantenlänge,	Vorzeichen
1	0	0	5	beliebig
2	1	1	3	negativ

Zur Behandlung von $\mathscr{L}(I) = 2$ wird vorausgesetzt, daß s in keinem der beiden Teilstücke von I als beste Approximation von f charakterisiert ist.

Die Elemente von $\bar{\gamma}$ lassen sich nach ihrem Verhalten in dem einzigen inneren Knoten x_1 von I klassifizieren. Unser Ziel ist die Verifikation der Tabelle 2.

TABELLE 2

Notwendige und hinreichende Bedingungen im Fall $\mathscr{L}(I) = 2$

Fall	$n_1(s)$	$n_2(s)$	$g(s)$	$d(s)$	$e(s)$	Alternantenlänge,	Vorzeichen
1	0	0	0	0	0	6	beliebig
2	0	0	2	2	0	3	negativ
3	1	0	2	0	0	5	negativ
4	0	1	1	0	0	5	negativ

Die Werte $g(s)$ sind nach Abschnitt 2 durch n_1 und n_2 auf die genannten Werte eingeschränkt.

Nach Satz 5.1 in [6] und Satz 4.3 sind die Bedingungen hinreichend. Die

Notwendigkeit ergibt sich im Fall 1 aus den Ergebnissen des Abschnitts 3 und im Fall 2 aus ähnlichen Überlegungen wie für $\mathscr{L}(I) = 1$. Für die übrigen Fälle stützt sich der Nachweis auf zwei Lemmata.

LEMMA 5.1. *Sei $I = [\alpha, \beta]$ und $\mathscr{L}(I) = 2$. Es gelte*

$$\alpha \leqslant z_1 < z_2 < x_1 < z_3 < z_4 \leqslant \beta.$$

Der rationale Spline s habe in x_1 einen Knoten 1. oder 2. Art. Dann besitzt die Interpolationsaufgabe

$$\tilde{s}(z_j) = s(z_j) \qquad \textit{für} \quad j = 1,\ldots, 4$$

und (5.1)

$$\tilde{s}(x_1) = s(x_1) + \delta$$

in der Klasse $\bar{\gamma}$ für

$$\begin{array}{ll} \delta < 0 & \textit{keine Lösung,} \\ \delta = 0 & \textit{die Lösung } \tilde{s} = s, \\ \delta > 0, & \delta \textit{ hinreichend klein, eine Lösung } \tilde{s} \in \gamma. \end{array}$$

In dem letzten Falle gilt

$$s - \tilde{s} \begin{cases} > 0 & \textit{in} \quad (z_1, z_2) \cup (z_3, z_4), \\ < 0 & \textit{in} \quad [\alpha, z_1) \cup (z_2, z_3) \cup (z_4, \beta]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Für $\delta \to 0 + 0$ strebt $\tilde{s}$ gleichmäßig in I gegen s.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung ist $s(x)$ in einem der Intervallteilstücke linear. Für $\delta < 0$ führen drei geeignet gewählte Interpolationsdaten deshalb zu einem negativen zweiten Differenzenquotienten, so daß eine Interpolation mit einer konvexen Funktion ausgeschlossen ist. Für $\delta = 0$ ist nichts zu beweisen.

Sei $\delta > 0$. Dann sind die zweiten Differenzenquotienten (vgl. [7])

$$\Delta^2(z_1, z_2, x_1)\tilde{s} \qquad \text{und} \qquad \Delta^2(x_1, z_3, z_4)\tilde{s} \qquad \text{positiv.}$$

Eine Lösung der Interpolationsaufgabe (5.1) ist also in keinem Teilstück linear und gehört folglich zu γ.

Im Folgenden wird zur Vereinfachung $x_1 = 0$ angenommen, ferner sei s in I_2 linear. Da $\bar{\gamma}$ gegen Addition linearer Funktionen invariant ist, kann man $s(t) \equiv 0$ in I_2 annehmen. Die gegebene Funktion $s(t)$ hat also die Gestalt

$$s(t) = \begin{cases} g(t) + c \cdot \dfrac{(t - z_1)(t - z_2)}{1 - dt}, \quad d > 1/\alpha & \text{für } t \in I_1, \\ 0 & \text{für } t \in I_2, \end{cases} \tag{5.3}$$

dabei ist $g(t)$ eine lineare Funktion mit

$$g(0) = -cz_1z_2, \qquad g'(0) < 0.$$

Besitzt s einen Knoten 1. Art, so ist $c = 0$.

Bei einem Knoten 2. Art ist wegen der Konvexität $c > 0$. Außerdem folgt dann aus der Stetigkeit von s' die Gleichung

$$g'(0) + c[dz_1z_2 - z_1 - z_2] = 0. \tag{5.4}$$

Zur Lösung der Interpolationsaufgabe (5.1) kann man $\tilde{s}(t)$ in der Form

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} g(t) + (c + c_1)\dfrac{(t - z_1)(t - z_2)}{1 - d_1 \cdot t} & \text{in } I_1, \\ c_2 \dfrac{(t - z_3)(t - z_4)}{1 - d_2 t} & \text{in } I_2, \end{cases} \tag{5.5}$$

ansetzen. Die Koeffizienten c_1 und c_2 sind durch

$$\tilde{s}(0) = g(0) + (c + c_1)\, z_1z_2 = c_1z_1z_2 = c_2z_3z_4 = \delta > 0 \tag{5.6}$$

festgelegt. Es gilt $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Damit sind alle Interpolationsbedingungen erfüllt. Die noch freien Parameter d_1 und d_2 sind so zu bestimmen, daß $\tilde{s}(t)$ in x_1 zweimal stetig differenzierbar ist. Durch Gleichsetzen von $\tilde{s}'(0 - 0)$ und $\tilde{s}'(0 + 0)$ sowie von $s''(0 - 0)$ und $s''(0 + 0)$ erhält man das System

$$g'(0) + (c + c_1)[d_1z_1z_2 - z_1 - z_2] = c_2[d_2z_3z_4 - z_3 - z_4], \tag{5.7a}$$

$$(c + c_1)(1 - d_1z_1)(1 - d_1z_2) = c_2(1 - d_2z_3)(1 - d_2z_4). \tag{5.7b}$$

Die Existenz einer Lösung (d_1, d_2) kann man für kleine δ leicht durch eine geometrische Überlegung zeigen. Faßt man die beiden rechten bzw. linken Seiten als Funktionen von d_1 bzw. d_2 auf, so erhält man bei festem δ (und damit festem c_1 und c_2) Parameterdarstellungen nach oben offener Parabeln in einer (ξ, η)-Ebene:

$$P_1: \begin{cases} \xi = c_2[d_2 z_3 z_4 - z_3 - z_4], \\ \eta = c_2(1 - d_2 z_3)(1 - d_2 z_4), \end{cases}$$

$$P_2: \begin{cases} \xi = g'(0) + (c + c_1) \cdot [d_1 z_1 z_2 - z_1 - z_2], \\ \eta = (c + c_1)(1 - d_1 z_1)(1 - d_1 z_2). \end{cases}$$

Die Parabel P_1 schneidet die ξ-Achse für $d_2 = 1/z_j$, $j = 3, 4$ in

$$\xi_j = -c_2 \cdot z_j = -\delta \cdot \frac{z_j}{z_3 z_4} < 0,$$

die Parabel P_2 für $d_1 = 1/z_j$, $j = 1, 2$ in den Punkten

$$\xi_j = g'(0) - (c + c_1) \cdot z_j = g'(0) - c \cdot z_j - \delta \cdot \frac{z_j}{z_1 z_2} > g'(0) - c \cdot z_j,$$

denn es ist $z_1 < z_2 < 0$. Für $\delta \to 0$ strebt $\xi_{3/4} \to 0$ und

$$\xi_{1/2} \to \begin{cases} g'(0) < 0 & \text{für} \quad c = 0, \\ g'(0) - c z_j = c z_1 z_2[(1/z_j) - d] < 0 & \text{für} \quad c < 0, \end{cases}$$

da $d > 1/\alpha > 1/z_1 > 1/z_2$ gilt.
Die Nullstellen $\xi_{1/2}$ von P_2 liegen also für kleine δ links von den Nullstellen $\xi_{3/4}$ von P_1, so daß sich die beiden Parabeln in dem Gebiet $(\xi_2, \xi_3) \times (0, \infty)$ schneiden, wodurch die Existenz einer Lösung von (5.7) gezeigt ist. Da ξ in dem Schnittpunkt gerade den Wert $\tilde{s}'(0)$ liefert, gilt

$$g'(0) < \tilde{s}'(0) < 0. \tag{5.8}$$

Insbesondere folgt daraus zusammen mit (5.7a) für die zugehörigen Parameter

$$\begin{aligned} d_2 &< 1/z_4 + 1/z_3, \\ d_1 &> 1/z_1 + 1/z_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Die Vorzeichenaussage (5.2) ergibt sich daraus, daß $s - \tilde{s}$ die maximale Nullstellenzahl besitzt und das Vorzeichen in $x_1 \in (z_2, z_3)$ durch die Forderung (5.1) feststeht.

Es ist noch das Verhalten für $\delta \to 0$ zu untersuchen.

Sei $c = 0$, d.h. s habe in x_1 eine Knoten 1. Art. Wegen (5.6) sind c_1 und

c_2 proportional, und aus (5.7b) folgt, daß $|d_1|$ und $|d_2|$ beide beschränkt bleiben oder gegen unendlich gehen. Aus (5.7a) ergibt sich

$$\frac{g'(0)}{\delta} - \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = d_2 - d_1,$$

also sind $|d_1|$ und $|d_2|$ nicht beschränkt. Zusammen mit (5.9) erhält man

$$d_1 \to \infty, \qquad d_2 \to -\infty \qquad \text{für} \quad \delta \to 0.$$

Aus (5.5) entnimmt man, daß die Interpolierende $\tilde{s}$ für $\delta \to 0$ gleichmäßig in I gegen s streben.

Sei $c > 0$, d.h. x_1 ein Knoten 2. Art von s. In diesem Falle folgt aus $s'(0) = g'(0) + (c + c_1)[d_1 z_1 z_2 - z_1 - z_2]$ und den Schranken (5.8) für $\tilde{s}'(0)$, daß

$$d_1 = \frac{1}{z_1 z_2}\left[\frac{1}{c + c_1}[\tilde{s}'(0) - g'(0)] + z_1 + z_2\right] \qquad \text{für} \quad \delta \to 0$$

beschränkt bleibt. Aus (5.7b) schließt man auf

$$c_2 \cdot d_2^2 < \text{const},$$

also

$$c_2 \cdot (c_2 d_2^2) = (c_2 d_2)^2 \to 0 \qquad \text{für} \quad \delta \to 0.$$

Wegen (5.7a) und (5.4) gilt dann $\lim_{c_2 \to 0} d_1 = d$.

Schließlich impliziert die strenge Konvexität von s in I_1, daß $d \neq 1/z_1$, $1/z_2$ ist; denn sonst könnte man den Bruch in (5.3) kürzen und käme zu einer linearen Funktion in I_1. Die linke Seite von (5.7b) hat also einen von Null verschiedenen Grenzwert. Dies impliziert $|d_2| \to \infty$, und (5.9) liefert $d_2 \to -\infty$. Wie vorher erkennt man an (5.4), daß $\tilde{s}(t)$ mit $\delta \to 0$ gleichmäßig in I gegen $s(t)$ strebt. ∎

LEMMA 5.2. *Sei $I = [\alpha, \beta]$ und $\mathscr{L}(I) = 2$. Es gelte*

$$\alpha \leqslant z_1 < z_2 < z_3 < x_1 < z_4 \leqslant \beta.$$

Der rationale Spline s habe in x_1 einen Knoten 2. Art, in $[x_1, \beta]$ sei s linear. Dann gelten für das Interpolationsproblem

$$\tilde{s}(z_j) = s(z_j) \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

und (5.10)

$$\tilde{s}(x_1) = s(x_1) - \delta$$

in der Klasse $\tilde{\gamma}$ die gleichen Folgerungen wie in Lemma 5.1.

Beweis. Wie im vorigen Beweis darf $x_1 = 0$ und $s(t) \equiv 0$ in $[0, \beta]$ angenommen werden. Es gilt dann

$$s(t) = c \cdot t^2/(1 - dt) \qquad \text{mit} \quad c > 0, \qquad d > 1/\alpha \qquad \text{in} \quad [\alpha, 0]. \tag{5.11}$$

Sei $\delta > 0$. Eine Funktion $\tilde{s}$, die s in z_1, z_2 und z_3 interpoliert und in 0 positiv ist: $\tilde{s}(0) - s(0) > 0$, hat, wie eine einfache Abzählung der Nullstellen von $\tilde{s}(x) - s(x)$ in $[\alpha, 0]$ ergibt, in 0 auch eine positive erste Ableitung. Folglich verschwindet $\tilde{s}(x) - s(x)$ in $z_4 > 0$ nicht, und es gibt keine Lösung des Interpolationsproblems.

Sei $\delta > 0$. Wie betrachten zunächst das Intervall $[\alpha, 0]$. Für hinreichend kleines δ existiert die rationale Interpolierende zu $\tilde{s}(z_j) = s(z_j)$, $j = 1, 2, 3$ so wie $\tilde{s}(0) = -\delta$ und ist in $[\alpha, 0]$ stetig, d.h. für ihren Nennerkoeffizienten gilt $\tilde{d}_1 > 1/\alpha$. Wie vorher schließt man auf $\tilde{s}'(0) < 0$.

Eine Gerade $g(t)$ mit den Anfangswerten $g(0) = \tilde{s}(0)$, $g'(0) = \tilde{s}'(0)$ erfüllt $g(t) < 0$ für jedes positive t. Zur Lösung der Interpolationsaufgabe muß man also $\tilde{s}(t)$ in das Intervall $[0, \beta]$ durch eine rationale Funktion der Form

$$s^*(x) = g(t) + c_2 \cdot t^2/(1 - d_2 t), \qquad c_2 := 2 \cdot \tilde{s}''(0)$$

fortsetzen. Aus $s^*(z_4) = 0$ bestimmt man d_2 zu

$$d_2 \cdot z_4 = 1 + c_2 \cdot z_4^2/g(z_4),$$

und $\delta \to 0$ impliziert $g(z_4) \to 0 - 0$, $d_2 \to -\infty$. Für kleine Werte von δ kann man also $\tilde{s}(t)$ in $t > 0$ durch $\tilde{s}(t) := s^*(t)$ definieren, $\tilde{s}(t)$ ist dort stetig und es gilt $\tilde{s}(t) \to s(t)$ gleichmäßig in I für $\delta \to 0$. Die Richtigkeit der Vorzeichenaussage verifiziert man wie oben durch Abzählen der Nullstellen. ∎

Wir setzen nun den Nachweis fort, daß die in Tabelle 2 angegebenen Bedingungen notwendig sind.

FALL 3. Wenn es zu $f - s$ keine Alternante der Länge 5 gibt, so kann man durch stetige Fortsetzung von f und lineare Fortsetzung von s in ein Intervall $I^* \supset I$ erreichen, daß in I^* eine positive Alternante der Länge 5, aber keine der Länge 6 existiert und daß s auch nicht beste Approximation in einem der Teilstücke ist.

Es genügt also, im Falle einer positiven Alternante der Länge 5 eine besser approximierende rationale Splinefunktion zu konstruieren. In keinem Teilstück liegen mehr als 3 Punkte einer Alternante, da sonst ein Teilstück zur Charakterisierung ausreichen würde. Aus diesem Grunde ist auch der Knoten x_1 nicht Alternantenpunkt mit $f(x_1) - s(x_1) = -\|f - s\|$. Es gilt $f(x_1) - s(x_1) > -\|f - s\|$.

Man schließe wie im Beweis von Satz 3.4 die Gruppe der Alternantenpunkte in minimale Intervalle ein, und lege wie dort zwischen diese Intervalle Punkte z_1, $z_2 \in I_1$ und z_3, $z_4 \in I_2$. Dann liefert Lemma 5.1 eine Funktion $\tilde{s} \in \gamma$, welche die Vorzeichenbedingungen (5.2) erfüllt und sich hinreichend wenig von s unterscheidet. Eine solche Funktion erfüllt auch

$$\|f - s^*\| < \|f - s\|.$$

FALL 4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß I_2 das Linearitätsteilstück von s ist.

(a) Es gebe in I eine positive Alternante der Länge 5. Dann liegen in I_1 nach Voraussetzung höchstens 4, in I_2 höchstens 3 Punkte einer jeden Alternante. Deshalb ist nur der Fall zu diskutieren, daß 1, 2 oder 3 Alternantenpunktintervalle in I_2 liegen. Wieder kann man zwischen diese Intervalle Punkte z_j legen, wobei man mit einem oder zwei Punkten in I_2 auskommt. Lemma 5.1 oder Lemma 5.2 ermöglichen die Konstruktion einer besseren Approximation $\tilde{s}$.

(b) Es gebe keine Alternante der Länge 5. Durch Fortsetzung kann man erreichen, daß Alternanten der Länge 4 vorhanden sind. Die Alternantenpunkte seien wieder mit minimalen Intervallen wie in Abschnitt 3 überdeckt. Ist keines dieser Intervalle (vollständig) im Innern von I_2 enthalten, so beschaffe man sich zunächst in I_1 eine bessere rationale Approximation $\tilde{s}$ von f. Unterscheidet sich $\tilde{s}$ hinreichend wenig von s, so kann man durch Vorzeichenbetrachtungen über $r(0)$ und $r'(0)$ feststellen, daß man $\tilde{s}$ durch lineare Fortsetzung zu einer Funktion aus $\bar{\gamma}$ ergänzt, die in ganz I besser als s approximiert. Liegt mindestens eines der Alternantenpunktinvervalle in I_2, so kann man durch stetige Fortsetzung von f und rationale bzw. lineare Fortsetzung von s in ein Intervall $I^* \supset I$ zu einer positiven Alternanten der Länge 5 kommen und mit Fall (a) weiterschließen.

Also ist eine negative Alternante der Länge 5 für eine beste Approximation notwendig. Damit sind alle in Tabelle 2 gemachten Angaben nachgewiesen.

Eine analoge Diskussion könnte man auch im Falle von mehr als 2 Intervallteilstücken durchführen.

Als Anwendung betrachten wir die Tschebyscheff-Approximation einer streng konvexen Funktion durch Splines $\in \bar{\gamma}$ mit genau einem inneren Knoten und zeigen, daß keine Approximierende mit einem Knoten 1. Art auftreten kann.

Angenommen, s habe einen Knoten 1. Art, dann ist s in jedem der beiden Teilstücke linear. In jedem Teilstück ist $f - s$ konvex, und es treten jeweils maximal 3 Extrema der Funktion $f - s$ auf. Zwei davon liegen dann in den Randpunkten, und $f - s$ ist in den Randpunkten positiv. Insgesamt ist also höchstens eine positive Alternante der Länge 5 möglich. Die notwendige Bedingung ist nicht erfüllbar.

Literatur

1. D. Braess, Chebyshev approximation by γ-polynomials, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 20–43.
2. W. Hurewicz and H. Wallman, "Dimension Theory," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1948.
3. G. Meinardus, "Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
4. R. Schaback, Spezielle rationale Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 281–292.
5. L. L. Schumaker, Uniform approximation by Tschebyscheffian spline functions, *J. Math. Mech.* **18** (1968), 369–378.
6. H. Werner, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 1–5.
7. H. Werner, "Vorlesung über Approximationstheorie," Lecture Notes No. 14, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.